УДК 51:53

Р. В. Чириков, А. А. Юрова

ПАРА ЛАКСА ДЛЯ (1 + 3) НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Отмечается, что интегральные системы с четырьмя независимыми переменными имеют особое значение в прикладной математике и физике. Открытие метода обратной задачи рассеивания сыграло важную роль в пересмотре и переоценке места, которое занимают системы интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных в математических науках. Поиск систематического подхода к построению точных решений таких систем стал одной из основных задач теории интегрируемых систем.

Integral systems with four independent variables have special significance in mathematics and physics. The discovery of inverse scattering method *played an important role in reconsidering the place of integrable systems of nonlinear partial differential equations in mathematical sciences. The search for a systematic approach to developing exact solutions of such systems has become one of the main problems in the theory of integrable systems.*

Ключевые слова: пара Лакса, (1 + 3) нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных, точные решения, полная интегрируемость.

Key words: Lax pair, (1 + 3) nonlinear partial differential equation, exact solution, integrable equation.

Значительная часть из известных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, обладающих свойством полной интегрируемости, одномерна. При переходе к уравнениям с более высокой размерностью пространства, существующая математическая теория наталкивается на ряд фундаментальных алгебраических и геометрических преград.

В современной теории применяются различные способы построения точных решений систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, например: метод одевания [1; 3; 6; 8; 10], преобразования Дарбу, метод обратной задачи рассеивания и другие [5; 11; 12].

Интегрируемость таких уравнений сильно зависит от наличия у них пары Лакса. [L, A]-пара имеет определяющее значение при использовании метода обратной задачи рассеивания для решения солитонных уравнений. Но само существование пары Лакса в общем случае не является гарантом того, что соответствующее уравнение в частных производных будет обладать свойством интегрируемости. Однако ее наличие дает возможность построить нетривиальные точные решения исходного уравнения.

Для любого $d \geq 1$ и произвольного эволюционного нелинейного скалярного уравнения

$$u_t = F[u],$$

где $F[u]$ — алгебраическое выражение, содержащее u и ее пространственные производные, существует пара [L, A].

В данной работе мы не будем рассматривать случаи при d = 1 и d = 2, а сосредоточимся на трехмерной задаче. Мы выбираем [L, A]-пару в виде:

$$\begin{cases} \Psi_{xyz} = U\Psi; \\ \Psi_t = \Psi_{5x} + \Psi_{5y} + \Psi_{5z} + A_4\Psi_{4x} + B_4\Psi_{4y} + C_4\Psi_{4z} + A_3\Psi_{3x} + \\ + B_3\Psi_{3y} + C_3\Psi_{3z} + A_2\Psi_{2x} + B_2\Psi_{2y} + C_2\Psi_{2z} + A_1\Psi_x + B_1\Psi_y + \\ + C_1\Psi_z + U\Psi, \end{cases} \qquad 1)$$

где $A_i; B_i; C_i (i = 1..4)$ – произвольные константы и $U = U(x, y, z, t)$, $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$. Индекс вида $k\ x$ означает k-кратное дифференцирование по x.

Проверим условие совместности для данной пары:

$$(\Psi_{xyz})_t = (\Psi_t)_{xyz}\,, \tag{*}$$

которую также можно записать в виде:

$$(U\Psi)_t = (\Psi_t)_{xyz}\,. \tag{**}$$

Подставив (1) в (*)–(**) и продифференцировав соответствующие функции, получим уравнение совместности, в котором, приравняв коэффициенты при соответствующих Ψ, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&U_t + U^2 - U_{5x} - U_{5y} - U_{5z} - A_4U_{4x} - B_4U_{4y} - C_4U_{4z} - A_3U_{3x} -\\
&-B_3U_{3y} - C_3U_{3z} - A_{4,x}U_{3x} - -B_{4,y}U_{3y} - C_{4,z}U_{3z} - A_2U_{2x} - B_2U_{2y} -\\
&-C_2U_{2z} - A_{3,x}U_{2x} - B_{3,y}U_{2y} - C_{3,z}U_{2z} - A_1U_x - B_1U_y - C_1U_z -\\
&-A_{2,x}U_x - B_{2,y}U_y - C_{2,z}U_z - A_{1,x}U - B_{1,y}U - C_{1,z}U - U = 0;\\
&4A_4U_{3x} + 3A_{4,x}U_{2x} + 3A_3U_{2x} + 2A_2U_x + 2A_{3,x}U_x + A_{2,x}U + 5U_{4x} +\\
&+A_{1,xyz} = 0;\\
&6A_4U_{2x} + 3A_{4,x}U_x + 3A_3U_x + A_{3,x}U + A_{1,zy} + 10U_{3x} + A_{2,xyz} = 0;\\
&4A_4U_x + A_{4,x}U + A_{2,yz}U + 10U_{2x} + A_{3,xyz} = 0;\\
&4B_4U_{3y} + 3B_{4,y}U_{2y} + 3B_3U_{2y} + 2B_2U_y + 2B_{3,y}U_y + B_{2,y}U + 5U_{4y} +\\
&+B_{1,xyz} = 0;\\
&6B_4U_{2y} + 3B_{4,y}U_y + 3B_3U_y + B_{3,y}U + B_{1,xz} + 10U_{3y} + B_{2,xyz} = 0;\\
&4B_4U_y + B_{4,y}U + B_{2,xz}U + 10U_{2y} + B_{3,xyz} = 0;\\
&4C_4U_{3z} + 3C_{4,z}U_{2z} + 3C_3U_{2z} + 2C_2U_z + 2C_{3,z}U_z + C_{2,z}U + 5U_{4z} +\\
&+C_{1,xyz} = 0;\\
&6C_4U_{2z} + 3C_{4,z}U_z + 3C_3U_z + C_{3,z}U + C_{1,xy} + 10U_{3z} + C_{2,xyz} = 0;\\
&4C_4U_z + C_{4,z}U + C_{2,xy}U + 10U_{2z} + C_{3,xyz} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
A_{4,y}, A_{4,z}, A_{4,yz} = 0 = 0 & B_{4,x}, B_{4,z}, B_{4,xz} = 0 & C_{4,x}, C_{4,y}, C_{4,xy} = 0,\\
A_{3,yz} + A_{4,xyz} + 5U_x = 0 & B_{3,xz} + B_{4,xyz} + 5U_y = 0 & C_{3,xy} + C_{4,xyz} + 5U_z = 0,\\
A_{3,z} + A_{4,xz} = 0 & B_{3,z} + B_{4,yz} = 0 & C_{3,y} + C_{4,yz} = 0,\\
A_{3,y} + A_{4,xy} = 0 & B_{3,x} + B_{4,xy} = 0 & C_{3,x} + C_{4,xz} = 0,\\
A_{2,y} + A_{3,xy} = 0 & B_{2,z} + B_{3,yz} = 0 & C_{2,y} + C_{3,yz} = 0,\\
A_{2,z} + A_{3,xz} = 0 & B_{2,x} + B_{3,xy} = 0 & C_{2,x} + C_{3,xz} = 0,\\
A_{1,z} + A_{2,xz} = 0 & B_{1,z} + B_{2,yz} = 0 & C_{1,y} + C_{2,yz} = 0,\\
A_{1,y} + A_{2,xy} = 0 & B_{1,x} + B_{2,xy} = 0 & C_{1,x} + C_{2,xz} = 0,\\
B_{1,yz} + A_{1,xz} = 0 & A_{1,xy} + C_{1,yz} = 0 & B_{1,xy} + C_{1,xz} = 0.
\end{array}$$

Интерес представляют прежде всего коэффициенты при Ψ_{4x}, Ψ_{4y}, $\Psi_{4z}, \Psi_{4xy}, \Psi_{x4y}, \Psi_{x4z}$, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{array}{lll} A_{4,xz} + A_{3,z} = 0 & B_{4,yz} + B_{3,z} = 0 & C_{4,yz} + C_{3,y} = 0 \\ A_{4,xyz} + A_{3,yz} + 5U_x = 0 & B_{4,xyz} + B_{3,xz} + 5U_y = 0 & C_{4,xyz} + C_{3,yz} + 5U_z = 0. \end{array}$$

Не теряя общности, положим константы интегрирования равными нулю. Откуда можно сделать вывод о том, что $A_3 = -A_{4,x}$, $B_3 = -B_{4,y}$, $C_3 = C_{4,z}$. Из этого следует: $U_x = 0, U_y = 0, U_z = 0$, — в сущности означающее, что $U = const$. То есть система уравнений (1) не представляет ценности для решения нашей основной задачи.

Следует внести измения в условия, добавив в пару *[L, A]* (1) необходимые слагаемые. Как было сказано выше, соответствующие слагаемые надо добавить при $\Psi_{4x}, \Psi_{4y}, \Psi_{4z}, \Psi_{4x}, \Psi_{4xy}, \Psi_{x4y}, \Psi_{x4z}$. Подходящими являются производные пятого порядка, то есть функции $\Psi_{4xy}, \Psi_{x4y}, \Psi_{y4z}$ с соответствующими им коэффициентами A_5, B_5, C_5.

Тогда пара *[L, A]* (1) принимает вид :

$$\begin{cases} \Psi_{xyz} = U\Psi; \\ \Psi_t = \Psi_{5x} + \Psi_{5y} + \Psi_{5z} + A_5\Psi_{4xy} + B_5\Psi_{x4y} + C_5\Psi_{y4z} + A_4\Psi_{4x} + \\ +B_4\Psi_{4y} + C_4\Psi_{4z} + A_3\Psi_{3x} + B_3\Psi_{3y} + C_3\Psi_{3z} + A_2\Psi_{2x} + B_2\Psi_{2y} + \\ +C_2\Psi_{2z} + A_1\Psi_x + B_1\Psi_y + C_1\Psi_z + U\Psi. \end{cases}$$

Вычислив условие совместности в данном случае и выписав коэффициенты при соответствующих Ψ, получим систему уравнений, решение которой имеет вид:

$$\begin{array}{lll} A_1 = -A_{2,x} & B_1 = -B_{2,y} & C_1 = -C_{2,z} \\ A_2 = -A_{3,x} & B_2 = -B_{3,y} & C_2 = -C_{3,z} \\ A_3 = -A_{4,x} & B_3 = -B_{4,y} & C_3 = -C_{4,z} \\ A_4 = -A_{5,y} & B_4 = -B_{5,x} & C_4 = -C_{5,y} \end{array}$$

$$A_5 = -\frac{5U_{2x}U}{2(U_{xy}U - U_xU_y)}; \qquad B_5 = -\frac{5U_{2y}U}{2(U_{xy}U - U_xU_y)};$$

$$C_5 = -\frac{5U_{2z}U}{2(U_{yz}U - U_zU_y)}.$$

Подставляя полученные значения коэффициентов и упрощая выражение, получим:

$$\begin{aligned} U_t + U^2 = \quad & U_{5x} + U_{5y} + U_{5z} + A_{5,x}U_{3xy} + B_{5,y}U_{x3y} + C_{5,z}U_{y3z} + \\ & +A_3U_{3x} + B_3U_{3y} + C_3U_{3z} + B_{1,y}U + U. \end{aligned}$$

Однако в данной постановке задачи уравнение не обладает симметричностью. Добавим три производных пятого порядка с коэффициентами A_6, B_6, C_6. Получим:

$$\begin{cases} \Psi_{xyz} = U\Psi; \\ \Psi_t = \Psi_{5x} + \Psi_{5y} + \Psi_{5z} + A_5\Psi_{4xy} + A_6\Psi_{4xz} + B_5\Psi_{x4y} + B_6\Psi_{z4y} + \\ +C_5\Psi_{y4z} + +C_6\Psi_{x4z} + A_4\Psi_{4x} + B_4\Psi_{4y} + C_4\Psi_{4z} + A_3\Psi_{3x} + B_3\Psi_{3y} + \\ +C_3\Psi_{3z} + A_2\Psi_{2x} + +B_2\Psi_{2y} + C_2\Psi_{2z} + A_1\Psi_x + B_1\Psi_y + C_1\Psi_z + U\Psi. \end{cases}$$

После проверки условия совместности получим следующую систему уравнений:

$$U_t + U^2 - U_{5x} - U_{5y} - U_{5z} - A_{6,z}U_{4x} - A_6U_{4xz} - A_{6,xz}U_{3x} -$$
$$-A_{6,x}U_{3xz} - B_{6,z}U_{4y} - B_{6,yz}U_{3y} - B_6U_{4yz} - B_{6,y}U_{3yz} - C_6U_{x4z} -$$
$$-C_{6,xz}U_{3z} - C_{6,x}U_{4z} - C_{6,z}U_{x3z} - A_{5,y}U_{4x} - A_{5,xy}U_{3x} - A_5U_{4xy} -$$
$$-A_{5,x}U_{3xy} - -B_{5,x}U_{4y} - B_{5,xy}U_{3y} - B_5U_{x4y} - B_{5,y}U_{x3y} - C_{5,y}U_{4z} -$$
$$-C_{5,yz}U_{3z} - C_5U_{y4z} - C_{5,z}U_{y3z} - A_4U_{4x} - -B_4U_{4y} - C_4U_{4z} -$$
$$-A_3U_{3x} - B_3U_{3y} - C_3U_{3z} - A_{4,x}U_{3x} - B_{4,y}U_{3y} - C_{4,z}U_{3z} -$$
$$-A_2U_{2x} - B_2U_{2y} - C_2U_{2z} - A_{3,x}U_{2x} - B_{3,y}U_{2y} - C_{3,z}U_{2z} -$$
$$-A_1U_x - B_1U_y - C_1U_z - A_{2,x}U_x - B_{2,y}U_y - C_{2,z}U_z - A_{1,x}U -$$
$$-B_{1,y}U - C_{1,z}U - U = 0;$$

$$C_{6,z}U_{3z} + C_6U_{4z} + 3A_{6,xz}U_{2x} + 4A_{6,z}U_{3x} + 4A_6U_{3xz} +$$
$$+3A_{6,x}U_{2xz} + B_5U_{4y} + B_{5,y}U_{3y} + 4A_{5,y}U_{3x} + 3A_{5,xy}U_{2x} +$$
$$+4A_5U_{3xy} + 3A_{5,x}U_{2xy} + 4A_4U_{3x} + 3A_{4,x}U_{2x} + 3A_3U_{2x} +$$
$$+2A_2U_x + 2A_{3,x}U_x + A_{2,x}U + +5U_{4x} + A_{1,xyz} = 0;$$
$$6A_{6,z}U_{2x} + 3A_{6,xz}U_x + 6A_6U_{2xz} + 3A_{6,x}U_{xz} + 6A_{5,y}U_{2x} +$$
$$+3A_{5,xy}U_x + 6A_5U_{2xy} + 3A_{5,x}U_{xy} + 6A_4U_{2x} + 3A_{4,x}U_x +$$
$$+3A_3U_x + A_{3,x}U + A_{1,zy} + 10U_{3x} + A_{2,xyz} = 0;$$

$$4A_{6,z}U_x + A_{6,xz}U + 4A_6U_{xz} + A_{6,x}U_z + 4A_{5,y}U_x + A_{5,xy}U +$$
$$+4A_5U_{xy} + A_{5,x}U_y + 4A_4U_x + A_{4,x}U + +A_{2,yz}U + 10U_{2x} + A_{3,xyz} = 0;$$
$$A_{6,z}U + A_6U_z + A_{5,y}U + A_5U_y + A_{3,yz} + A_{4,xyz} + 5U_x = 0;$$

$$A_{2,z} + A_{3,xz} + A_{5,x}U + 4A_5U_x = 0;$$
$$A_{2,y} + A_{3,xy} + A_{6,x}U + 4A_6U_x = 0;$$

$$A_{1,z}+A_{2,xz}+6A_5U_{2x}+3A_{5,x}U_x=0;$$
$$A_{1,y}+A_{2,xy}+6A_6U_{2x}+3A_{6,x}U_x=0;$$
$$4B_{6,z}U_{3y}+3B_{6,yz}U_{2y}+4B_6U_{3yz}+3B_{6,y}U_{2yz}+C_5U_{4z}+$$
$$+C_{5,z}U_{3z}+A_5U_{4x}+A_{5,x}U_{3x}+4B_{5,x}U_{3y}+3B_{5,xy}U_{2y}+$$
$$+4B_5U_{x3y}+3B_{5,y}U_{x2y}+4B_4U_{3y}+3B_{4,y}U_{2y}+3B_3U_{2y}+$$
$$+2B_2U_y+2B_{3,y}U_y+B_{2,y}U+5U_{4y}+B_{1,xyz}=0;$$
$$6B_{6,z}U_{2y}+3B_{6,yz}U_y+6B_6U_{2yz}+3B_{6,y}U_{yz}+6B_{5,x}U_{2y}+$$
$$+3B_{5,xy}U_y+6B_5U_{x2y}+3B_{5,y}U_{xy}+6B_4U_{2y}++3B_{4,y}U_y+$$
$$+3B_3U_y+B_{3,y}U+B_{1,xz}+10U_{3y}+B_{2,xyz}=0;$$
$$4B_{6,z}U_y+B_{6,yz}U+4B_6U_{yz}+B_{6,y}U_z+4B_{5,x}U_y++B_{5,xy}U+$$
$$+4B_5U_{xy}+B_{5,y}U_x+4B_4U_y+B_{4,y}U++B_{2,xz}U+10U_{2y}+B_{3,xyz}=0;$$
$$B_{6,z}U+B_6U_z+B_{5,x}U+B_5U_x+B_{3,xz}+B_{4,xyz}+5U_y=0;$$
$$B_{2,z}+B_{3,yz}+B_{5,y}U+4B_5U_y=0;$$
$$B_{2,x}+B_{3,xy}+B_{6,y}U+4B_6U_y=0;$$
$$B_{1,z}+B_{2,yz}+6B_5U_{2y}+3B_{5,y}U_y=0;$$
$$B_{1,x}+B_{2,xy}+6B_6U_{2y}+3B_{6,y}U_y=0;$$
$$B_6U_{4y}+B_{6,y}U_{3y}+A_6U_{4x}+A_{6,x}U_{3x}+4C_{6,x}U_{3z}+3C_{6,xz}U_{2z}+$$
$$+4C_6U_{x3z}+3C_{6,z}U_{x2z}+4C_{5,y}U_{3z}++3C_{5,yz}U_{2z}+4C_5U_{y3z}+$$
$$+3C_{5,z}U_{y2z}+4C_4U_{3z}+3C_{4,z}U_{2z}+3C_3U_{2z}+2C_2U_z+2C_{3,z}U_z+$$
$$+C_{2,z}U++5U_{4z}+C_{1,xyz}=0;$$
$$6C_{6,x}U_{2z}+3C_{6,xz}U_z+6C_6U_{x2z}+3C_{6,z}U_{xz}+6C_{5,y}U_{2z}+3C_{5,yz}U_z+$$
$$+6C_5U_{y2z}+3C_{5,z}U_{yz}+6C_4U_{2z}++3C_{4,z}U_z+3C_3U_z+C_{3,z}U+$$
$$+C_{1,xy}+10U_{3z}+C_{2,xyz}=0;$$
$$4C_{6,x}U_z+C_{6,xz}U+4C_6U_{xz}+C_{6,z}U_x+4C_{5,y}U_z+C_{5,yz}U+4C_5U_{yz}+$$
$$+C_{5,z}U_y+4C_4U_z+C_{4,z}U++C_{2,xy}U+10U_{2z}+C_{3,xyz}=0;$$
$$C_{6,x}U+C_6U_x+C_{5,y}U+C_5U_y+C_{3,xy}+C_{4,xyz}+5U_z=0;$$
$$C_{2,x}+C_{3,xz}+C_{5,z}U+4C_5U_z=0;$$
$$C_{2,y}+C_{3,yz}+C_{6,z}U+4C_6U_z=0;$$
$$C_{1,x}+C_{2,xz}+6C_5U_{2z}+3C_{5,z}U_z=0;$$
$$C_{1,y}+C_{2,yz}+6C_6U_{2z}+3C_{6,z}U_z=0;$$

$$A_{1,xy} + C_{1,yz} + 4B_5U_{3y} + 3B_{5,y}U_{2y} + 4A_5U_{3x} + 3A_{5,x}U_{2x} = 0;$$
$$B_{1,yz} + A_{1,xz} + 4C_6U_{3z} + 3C_{6,z}U_{2z} + 4A_6U_{3x} + 3A_{6,x}U_{2x} = 0;$$
$$B_{1,xy} + C_{1,xz} + 4C_5U_{3z} + 3C_{5,z}U_{2z} + 4B_6U_{3y} + 3B_{6,y}U_{2y} = 0;$$
$$A_{6,y}, A_{6,xy} = 0; \qquad B_{6,x}, B_{6,xy} = 0; \qquad C_{6,y}, C_{6,yz} = 0;$$
$$A_{5,z}, A_{5,xz}, A_{4,yz} = 0; \qquad B_{5,z}, B_{5,yz}, B_{4,xz} = 0; \qquad C_{5,x}, C_{5,xz}, C_{4,xy} = 0;$$
$$A_{4,z} + A_{5,yz} = 0; \qquad B_{4,z} + B_{5,xz} = 0; \qquad C_{4,x} + C_{5,xy} = 0;$$
$$A_{6,yz} + A_{4,y} = 0; \qquad B_{6,xz} + B_{4,x} = 0; \qquad C_{6,xy} + C_{4,y} = 0;$$
$$A_{3,z} + A_{4,xz} + A_{5,xyz} = 0; B_{3,z} + B_{4,yz} + B_{5,xyz} = 0; C_{3,x} + C_{4,xz} + C_{5,xyz} = 0;$$
$$A_{3,y} + A_{4,xy} + A_{6,xyz} = 0; B_{3,x} + B_{4,xy} + B_{6,xyz} = 0; C_{3,y} + C_{4,yz} + C_{6,xyz} = 0.$$

Легко увидеть, что:

$$A_4 = -A_{5,y}; B_4 = -B_{5,x}; C_4 = -C_{5,y}; A_4 = -A_{6,z}; B_4 = -B_{6,z}; C_4 = -C_{6,x}.$$

Однако для дальнейшего упрощения очевидных способов нет. Возможно выразить коэффициенты A_3, A_5, A_6. Но, поскольку коэффициенты A_1, A_2 присутствуют в системе уравнений только в их производных, очевидных способов их выразить не найдено. Таким образом, говорить о каком-либо упрощении уравнений при Ψ не приходится.

Заключение

Задачу полной интегрируемости систем дифференциальных уравнений в частных производных можно назвать одной из ключевых проблем математической физики. Но отсутствие общепринятого определения интегрируемости становится серьезным препятствием на пути ее решения. Множество определений и подходов, предложенных за последние полвека, имеют свои преимущества и недостатки, но ни одно из них не смогло выйти за узкие рамки и охватить сущность интегрируемости. Стоит упомянуть, что, несмотря на различия, общая идея объединения подходов существует, и выражается она в качестве требования наличия пары Лакса.

В данной статье были предприняты попытки поиска общего вида пары Лакса, приводящие к интегрируемым (3+1)-мерным нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных. Пока сложность получающихся уравнений не позволяет использовать их для точного моделирования физических процессов, но нам представляется целесообразным продолжить работу в данном направлении.

Список литературы

1. *Fokas A. S.* Symmetries and integrability // Stud. Appl. Math. 77. 1987. No. 3. P. 253—299.

2. *Солитоны* и метод обратной задачи / пер. с англ. М., 1987.
3. *Matveev V.B., Salle M. A.* Darboux Transformation and Solitons. Berlin, 1991.
4. *Doktorov E.V., Leble S.B.* A Dressing Method in Mathematical Physics. Berlin, 2007.
5. *Akhmediev N., Eleonskii V.M., Kulagin N.E.* Exact first-order solutions of the nonlinear Schodinger equation // Theor. Math. Phys. 1988. № 72. P. 809—818.
6. *Hirota R.* The direct method in soliton theory. Cambridge, 2004.
7. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. 1950. P. 201—230.
8. *Leble S.B., Salle M.A., Yurov A.V.* Darboux transforms for Davey-Stewartson equations and solitons in multidimensions // Inverse problems. 1992. № 4. P. 207—218.
9. *Dubrovin B.A.* Hamiltonian PDEs: deformations, integrability, solutions // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. № 43. P. 434002.
10. *Faddeev L.D.* The new life of complete integrability // Phys. Usp. 56. 2013. No. 5. P. 465—472.
11. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. М., 1989.

Об авторах

Роман Викторович Чириков — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: tdrifter@yandex.ru

Алла Александровна Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининградский государственный технический университет, Калининград.
E-mail: yurov@freemail.ru

About the authors

Roman Chirikov, PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: tdrifter@yandex.ru.

Dr Alla Yurova, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University, State Technical University, Kaliningrad.
E-mail: yurov@freemail